

Структурные характеристики вариационного ряда
Применение квантилей для интерпретации тестовых результатов.

Вадим Аванесов

testolog@mail.ru

Опубликовано в ж. «Педагогические Измерения № 1 2010 г.

Печатается в обновлённой редакции

Аннотация

В статье рассматриваются методы получения структурных характеристик вариационного ряда и нормализации тестовых результатов, вопросы расчёта процентного рейтинга испытуемых, интерпретации результатов.

Актуальность излагаемых методов вытекает из спорности используемых сейчас методов трансформации исходных данных в т.н. контрольно-измерительных материалах единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Исходные определения

Вариационным рядом называют значения тестовых баллов и соответствующие им частоты, показывающие – как часто встречается в выборке каждый исходный тестовый балл. Вариационный ряд представляется в виде двух столбцов – тестовых баллов (X_i) и частот f . (см. пример табл.1).

Вариационный ряд может быть сгруппированным и не сгруппированным. Квантили определяются точнее, если данные не сгруппированы.

Упорядоченным вариационным рядом называют такие значения тестовых баллов и соответствующих им частоты, которые располагаются последовательно по признаку уменьшения или увеличения баллов.

Пример упорядоченного вариационного ряда исходных тестовых баллов¹ приводится в табл. 1.

Табл. 1. N = 180.

X_i	f
70	0
69	1
68	2
67	3
66	0
65	2
64	4
63	5
62	3
61	1
60	2
59	3
58	2
57	6
56	14
55	12
54	7
53	7

¹ Источник данных: Hinkle D., Wiersma W., Jurs S. Applied Statistics for the Behavioral Sciences. 1979. p. 13. Переработано автором этой статьи.

52	6
51	3
50	7
49	11
48	8
47	7
46	9
45	7
44	4
43	4
42	5
41	5
40	4
39	3
38	4
37	5
36	4
35	2
34	1
33	3
32	2
31	0
30	1
29	1
26	0
25	1
24	1
23	0

Квантили – это общее название числовых результатов испытуемых в вариационном ряду. Квантили, или иначе, структурные характеристики

значений вариационного ряда – это общее название значений медианы, т.н. квартилей, децилей и процентилей.

Медианой называется такое значение вариационного ряда, которое делит испытуемых на две равные части по количеству испытуемых.

Нормализацией называется метод трансформации исходных данных, позволяющий получить распределение результатов тестирования, соответствующее т. н. «нормальному» закону в статистической науке.

Процентиль (или центиль) - это значение *тестового балла* (X_i), ниже которого оказывается интересующий процент результатов (испытуемых) какого-либо теста. Например, если нужно найти процентиль 38 (P_{38}), то это значит, что надо найти такое значение тестового балла, ниже которого показали результаты 38 % испытуемых.

Часто интересуются вопросом - какой тестовый балл отделяет знающую половину испытуемых от менее знающей половины? Это означает, что надо найти процентиль 50-й (P_{50}). Точно такую же задачу решает и значение медианы (Me). Таким образом $Me = (P_{50})$. 99 процентилей делят вариационный ряд на 100 равных, по проценту испытуемых, частей.

Дециль – это значения тестовых баллов, которые последовательно отделяют каждые следующие десять процентов испытуемых. При мониторинге обычно интересуют значения P_{10} , P_{20} , P_{30} , P_{40} , P_{50} , P_{60} , P_{70} , P_{80} , P_{90} .

P_{10} – первый дециль (D_1) - это граничное значение тестового балла, ниже которого показали 10 % неподготовленных испытуемых.

P_{20} - второй дециль (D_2) - это значение тестового балла, ниже которого показали 20 % слабо подготовленных испытуемых.

P_{30} – третий дециль (D_3) - это значение граничное тестового балла, ниже которого показали 30 % недостаточно подготовленных испытуемых.

P_{40} - четвертый дециль (D_4) - это граничное значение тестового балла, ниже которого показали 40 % испытуемых, имеющих подготовку ниже среднего уровня.

P_{50} – пятый дециль (D_5) - это граничное значение тестового балла испытуемых, имеющих подготовку среднего уровня и ниже.

P_{60} - шестой дециль (D_6) - это граничное значение тестового балла испытуемых, имеющих подготовку выше среднего уровня.

P_{70} седьмой дециль (D_7) - это граничное значение тестового балла испытуемых, имеющих подготовку заметно выше среднего уровня.

P_{80} восьмой дециль (D_8) - это граничное значение тестового балла испытуемых, имеющих хорошую подготовку.

P_{90} девятый дециль (D_9) - это граничное значение тестового балла испытуемых, имеющих лучшую подготовку, 10% самых подготовленных испытуемых. Эти девять децилей делят вариационный ряд на 10 равных, по количеству испытуемых, частей.

В педагогических измерениях и в экономике часто используется так называемый децильный коэффициент, который вычисляют по формуле $K_D = P_{90} - P_{10}$.

Расчёт медианы

Для начала возьмем пример небольшой группы испытуемых ($N = 12$), получивших по какому-либо тесту следующие баллы²: 7 10 8 4 6 5 4
3 5 6 6 6.

² Предполагается 11- бальная шкала оценивания результатов учащихся и студентов. См. статью: Аванесов В.С. Шкалирование тестовых результатов <http://viperson.ru/articles/vadim-avanesov-shkalirovanie-testovyh-rezultatov>

Для определения структурных характеристик этого примера данные полезно упорядочить, от низшего балла к высшему.

Баллы	3	4	4	5	5	6	6	6	7	8	10
Ранги	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12

Здесь число испытуемых чётно, поэтому значение медианы надо искать между значениями шестого и седьмого испытуемых. Шестой получил 5 баллов, седьмой – шесть баллов. В таких случаях значение медианы принимается равным средним между ними. Это 5,5 баллов.

Расчёт децилей и процентилей

Децили и процентиля обычно рассчитывают на достаточно больших выборочных совокупностях (выборках), представленных в виде вариационного ряда. В несгруппированном вариационном ряду частота указывается для каждого балла в отдельности; частота (f , от англ. frequency) показывает – сколько одинаковых баллов имеется в данной выборке. Такой вариационный ряд состоит из двух столбцов: в первом представлены значения тестовых баллов, во втором столбце – частоты.

P_{10} (первый дециль) другие интересующие значения процентилей можно найти как для сгруппированных, так и для несгруппированных данных.

Расчет P_{10} начнём с несгруппированных баллов табл. 2.

Вариационный ряд исходных тестовых баллов. $N = 180$

X	F	Cf	$cf_{B+} .5f$
70	0	180	180
69	1	180	179,5
68	2	179	178
67	3	177	175,5
66	0	174	174
65	2	174	173
64	4	172	170
63	5	168	165,5

62	3	163	161,5
61	1	160	159,5
60	2	159	158
59	3	157	155,5
58	2	154	153
57	6	152	149
56	14	146	139
55	12	132	126
54	7	120	116,5
53	7	113	109,5
52	6	106	103
51	3	100	98,5
50	7	97	93,5
49	11	90	84,5
48	8	79	75
47	7	71	67,5
46	9	64	59,5
45	7	55	51,5
44	4	48	46
43	4	44	42
42	5	40	35,5
41	4	35	33
40	4	31	29
39	2	27	26
38	4	25	23
37	5	21	18,5
36	4	16	14
35	2	12	11
34	1	10	9,5
33	3	9	7,5
32	2	6	5
31	0	4	4
30	1	4	3,5
29	1	3	2,5
26	0	2	2
25	1	2	1,5
24	1	1	0,5
23	0	0	0

Для расчета применяется формула: $X(P) = [X_{II} + i \left(\frac{Np - cf_B}{f} \right)]$ (1)

Где X(P) - значение тестового балла от интересующего процента; X_{II} - истинная нижняя граница класса;

N – объём выборки ; p – доля интересующих испытуемых;

cf_B - кумулированная частота баллов, находящаяся в нижележащем классе.

f - частота баллов в интересующем классе.

P_{10} (первый дециль)

Алгоритм расчета: 1 шаг – находят значение Np , где $N= 180$, p – доля.

Умножение доли на сто даёт соответствующий процент. 10 процентам соответствует доля 0,1. $Np = 18$ человек.

2 шаг – в столбце $\sum f$ таблицы 3 находим число испытуемых, ближайшее к 18, меньшее 18. Это число частот равно 16. Оно соответствует тестовому баллу 36. К тестовому баллу 36 накоплено 16 частот, до восемнадцати не хватает двух испытуемых. Этим двум недостающим берут в вышестоящей, по значению балла, группе.

Таким образом, $cf_B = 16$. $Np - cf_B = 18 - 16 = 2$.

3 шаг – делим числитель формулы (2) на число частот, имеющееся в группе испытуемых, получивших 37 баллов. Там имеется 5 человек.

$$\frac{18 - 16}{5} = 0,4$$

4 шаг. Умножаем полученное значение дроби на значение классового интервала i . В таблице 3 i равно 1.

5 шаг. Прибавляем значение дроби к значению нижней истинной границы класса 37. Эта граница равна 36,5.

6 шаг. Складываем значения: $X_{ii} + i \left(\frac{Np - cf_B}{f} \right)$; $36,5 + 0,4 = 36,9$. Таким образом, P_{10} (первый дециль) = 36,9. Это и есть то расчетное значение тестового балла, ниже которого показывают результаты 10% испытуемых.

Аналогично находят значения P_{20}

1 шаг – находят значение Np , где $N = 180$, p – доля, соответствующая 20 процентам. 20 процентам соответствует доля 0,2. Умножение доли на сто даёт 20 процентов. $Np = 36$ человек.

2 шаг – находим число частот, недостающее для расчета P_{20} , требуемых 36-ти человек. В столбце $\text{cum } f$ таблицы 3 находим число испытуемых, ближайшее к 36, меньше 36. Это число частот равно 35. Оно соответствует тестовому баллу 41. К тестовому баллу 41 накоплено 35 частот, до 36 не хватает одного испытуемого. Этого одного недостающего берут в вышестоящей, по значению балла, группе, получивших балл 42.

Таким образом, $cf_B = 35$. $Np - cf_B = 36 - 35 = 1$

3 шаг – делим числитель формулы (2) на число частот, имеющих в группе испытуемых, получивших 42 балла. Там имеется 5 человек.

$$\frac{36 - 35}{5} = 0,2$$

Нижняя граница интересующего процента испытуемых равна 41,5.

По формуле 2 получается $41,5 + 0,2 = 41,7$.

Таким образом, P_{20} (второй дециль) = 41,7. Это и есть то расчётное значение тестового балла, ниже которого показывают результаты 20% испытуемых. Точно так же можно найти все остальные значения процентилей и децилей.

Представляет интерес расчёт так называемых квартилей. Это верхние границы значений тестовых баллов первой (Q_1), второй (Q_2) и третьей четверти (Q_3) от объёма испытуемых.

Соответственно $Q_1 = P_{25}$ $Q_2 = P_{50}$ $Q_3 = P_{75}$

Три квартиля делят вариационный ряд на четыре равные, по количеству испытуемых, части. Такая задача решается посредством формулы

$$X(P) = [X_{ii} + i \left(\frac{Np - cf_B}{f} \right)] \quad (1) \text{ и следующего алгоритма:}$$

1 шаг – находят значение Np , где $N= 180$, а p – доля, соответствующая 25 процентам. 25 процентам соответствует доля 0,25. Умножение доли на сто даёт соответствующий процент.

$$Np = 180 \times 0,25 = 45 \text{ человек.}$$

2 шаг – находим число частот, недостающее для расчета P_{25} , требуемых 45-ти человек. В столбце $\text{cum } f$ таблицы 3 находим число испытуемых, ближайшее к 45, меньшее 45. Это число частот равно 44. Оно соответствует тестовому баллу 43. К тестовому баллу 43 накоплено 44 частоты, до 45 не хватает одного испытуемого. Его берут в вышестоящей, по значению балла 44, группе. $Np - cf_B = 45 - 44 = 1$

3 шаг – делим числитель формулы (2) на число частот, имеющееся в группе испытуемых, получивших 45 баллов. Там имеется 4 человека.

$$\frac{45 - 44}{4} = 0,25$$

4 шаг. Умножаем полученное значение дроби на значение классового интервала i . В таблице 3 i равно 1.

5 шаг. Прибавляем значение дроби к значению нижней истинной границы класса 44. Эта граница равна 43,5.

$$6 \text{ шаг. Складываем значения: } X_{ii} + i \left(\frac{Np - cf_B}{f} \right); 43,5 + 0,25 = 43,75$$

Таким образом, первый квартиль $Q_1 = P_{25}$ оказался равным 43,75 балла. Ниже этого значения получили баллы 25% испытуемых. Остальные значения представим без подробностей:

$$Q_2 = P_{50} = \text{значение медианы} = [49,5 + 1 (90 - 90) / 7] = 49,5$$

$$Q_3 = P_{75} = [55,5 + 1 \left(\frac{135 - 132}{14} \right)] = 55,714$$

Методика расчета процентиля для сгруппированных данных.

Пятый столбец выражается операцией $(cf_{в+.5f}) / N] \times 100$, где N – общее число испытуемых (N = 20).

1 шаг: Для определения процентиля строится вспомогательная табл. 4.

Классы	Истинные границы классов	Средние значения классов	Частоты (f)	Кумулированные частоты
65 - 69	64,5 – 69,5	67	6	180
60 – 64	59,5 – 64,5	62	15	174
55 – 59	54,5 – 59,5	57	37	159
50 – 54	49,5 – 54,5	52	30	122
45 – 49	44,5 – 49,5	47	42	92
40 – 44	39,5 – 44,5	42	22	50
35 – 39	34,5 – 39,5	37	18	28
30 – 34	29,5 – 34,5	32	7	10
25 – 29	24,5 – 29,5	27	2	3
20 – 25	19,5 – 24,5	22	1	1

В этой таблице:

- распределение кумулированных частот – частоты каждого класса включают в себя и все частоты нижележащих классов.
- % испытуемых в каждом классе получается делением частот в каждом классе на общее число испытуемых (N). Например, в классе 35-39 имеется 18 частот. Делим 18 на 180 и умножаем на сто; получаем 10% от всех частот находится в данном классе.

Теперь надо найти следующие процентиля:

P₁₀ 10% от 180 испытуемых = 18 человек.

Восемнадцатый испытуемый находится в классе 35 – 39. Нижняя граница этого класса равна 34,5. В нижележащем классе (30-34) кумулировано 10 человек. До 18 человек не хватает 8 испытуемых, которые находятся в классе 35-39. А всего в этом классе имеется 18 чел. Берем отношение $8 \div 18 (5) = 2,222$. К нижней границе $34,5 + 2,222 = 36,7$. Ниже этого числа находятся 10% испытуемых. $P_{10} = 36,7$

P_{20} 20 % испытуемых от 180 составляет 36 человек. 36-ой испытуемый находится в классе 40-44. Нижняя граница этого класса равна 39,5. В нижележащем классе (35-39) кумулировано 28 человек. До 36 человек не хватает 8 испытуемых, которые находятся в классе 40-44. А всего в этом классе имеется 22 чел. Берем отношение $8 \div 22 (5) = 1,818$. $39,5 + 1,818 = 41,318$
 $P_{20} = 41,318$

P_{30} 30% от 180 составляет 54 человека. 54-ый испытуемый находится в классе 45 – 49. Нижняя граница этого класса 44,5. В нижележащем классе 40-44 кумулировано 50 человек. До 54-х не хватает 4-х испытуемых, которые находятся в классе 45 - 49. А всего в этом классе имеется 42 чел. Берем отношение $4 \div 42 (5) = 0,476$. $44,5 + 0,476 = 44,976$. $P_{30} = 44,976$

P_{40} 40 % испытуемых от 180 составляет 72 человека.
72 -ой испытуемый находится в классе 45-49. Нижняя граница этого класса равна 44,5. В нижележащем классе кумулировано 50 человек. До 72 -х человек не хватает 22-х испытуемых, которые находятся в классе 45-49. А всего в этом классе имеется 42 чел. Берем отношение $22 \div 42 (5) = 2,619$.
 $44,5 + 2,619 = 47,119$ $P_{40} = 47,119$

P_{50} 50% испытуемых от 180 составляет 90 человек.
90-ый испытуемый находится в классе 45-49. Нижняя граница этого класса равна 44,5. В нижележащем классе 40-44 кумулировано 50 человек. До 90

человек не хватает 40 испытуемых, которые находятся в классе 45-49. А всего в этом классе имеется 42 чел. Берем отношение $40 \div 42 (5) = 4,762$. $44,5 + 4,762 = 49,262$. $P_{50} = 49,262$.

P_{60} 60% испытуемых от 180 составляет 108 человек. 108 -ой испытуемый находится в классе 50 -54. Нижняя граница этого класса равна 49,5. В нижележащем классе 45-49 кумулировано 92 человека. До 108 человек не хватает 16 испытуемых, которые находятся в классе 50-54. А всего в этом классе имеется 30 чел. Берем отношение $16 \div 30 (5) = 2,666$.

$$P_{60} \quad 49,5 + 2,666 = 52,166$$

P_{70} 70 % испытуемых от 180 составляет 126 человек. 126-ой испытуемый находится в классе 55-59. Нижняя граница этого класса равна 54,5.

В нижележащем классе 50-54 кумулировано 122 человека. До 126 человек не хватает 4-х испытуемых, которые находятся в классе 55-59. А всего в этом классе имеется 37 чел. Берем отношение $4 \div 37 (5) = 0,540$. $P_{70} = 54,5 + 0,540 = 55,4$.

P_{80} 80 % испытуемых от 180 составляет 144 человек. 144 -ой испытуемый находится в классе 55-59. Нижняя граница этого класса равна 54,5.

В нижележащем классе 50-54 кумулировано 122 человек. До 144 человек не хватает 22 испытуемых, которые находятся в классе 55-59. А всего в этом классе имеется 37 чел. Берем отношение $22 \div 37 (5) = 2,97$ $P_{80} = 54,4 + 2,97 = 57,47$

P_{90} 90 % испытуемых от 180 составляет 162 чел. 162 - ой испытуемый находится в классе 60-64. Нижняя граница этого класса равна 59,5.

В нижележащем классе 55-59 кумулировано 159 человек. До 162-х человек не хватает 3-х испытуемых, которые находятся в классе 60-64. А всего в этом классе имеется 15 чел. Берем отношение $(3 \setminus 15) \times (5) = 1$. $P_{90} = 59,5 + 1 = 60,5$.

Для нахождения процентиля 75:

1 шаг. Вначале определяется - сколько человек составляет 75 % от 180.

Для этого $(75 * 180) / 100 = 135$ чел.

2 шаг: Сто тридцать пятый человек находится в классе 55-59. Нижняя граница этого класса равна 54,5. В нижележащем классе кумулировано 122 частоты (испытуемых). До искомым 135 не хватает 13. Эти 13 человек находятся в классе 55-59. А всего в этом классе имеется 37 человек. Берется отношение $13/37$ и умножается на значение классового интервала. В нашем примере оно равно 5. Полученное произведение прибавляется к нижней границе, в котором находится интересующее значение процентиля. $P_{75} = 54,5 + (13/37) * 5 = 56,26$. Таким образом, $P_{75} = 56,26$.

Классы	Истинные границы классов	Средние значения классов	F	Кумулированные частоты	% испытуемых в Классе	Кумулированный % частот
65 – 69	64,5 – 69,5	67	6	180	3,33	100
60 – 64	59,5 – 64,5	62	15	174	8,33	96,67
55 – 59	54,5 – 59,5	57	37	159	20,56	88,34
50 – 54	49,5 – 54,5	52	30	122	16,67	67,78
45 – 49	44,5 – 49,5	47	42	92	23,33	51,11
40 – 44	39,5 – 44,5	42	22	50	12,22	27,78
35 – 39	34,5 – 39,5	37	18	28	10,00	15,56
30 – 34	29,5 – 34,5	32	7	10	3,89	5,56
25 – 29	24,5 – 29,5	27	2	3	1,11	1,67
20 – 25	19,5 – 24,5	22	1	1	0,56	0,56

Найти децильный размах ($D_9 - D_1$) и децильный коэффициент $D_9 \setminus D_1 = 60,5 \setminus 36,7 = 1,648$. Найти квартили 1-4. Квартиль один включает 25 % испытуемых. Это 45 человек. 45-ый испытуемый находится в классе 40-44. Нижняя граница класса равна 39.5. В нижележащем классе 35-39 кумулировано 28 человек. До 45 не хватает 17 испытуемых, которые находятся в классе 40-44. А всего в этом классе имеется 22 чел. Берем отношение $(17 \setminus 22) \times (5) = 3,864$. Квартиль 1 = $39,5 + 3,864 = 43.364$.

Расчет процентного ранга

Расчёт процентного ранга означает определение места испытуемых, показавших результат ниже данного тестового балла. Иначе говоря, насколько хорош или плох результат данного испытуемого относительно остальных членов совокупности. При расчете процентного ранга строится вспомогательная таблица (табл.3).

В этой таблице первые два столбца – это вариационный ряд - упорядоченные тестовые баллов и частоты;

Третий столбец представляет кумулированные частоты;

Значения четвертого столбца - сумма ($cf_B + .5f$) кумулированных частот нижележащего класса (cf_B) и половины частот интересующего класса ($.5f$);

Значения пятого столбца выражаются операцией $(cf_B + .5f) / N \times 100$, где N – общее число испытуемых ($N = 180$).

Общая формула расчета процентного ранга для всех полученных результатов такова: $PR(x) = \left(\frac{cf_B + 0,5f}{N} \right) \times 100$ (2)

Где $PR(x)$ означает процентный ранг интересующего балла;

- cf_B - это количество кумулированных частот нижележащего ряда;
- $0,5f$ - это половина частот интересующего тестового балла.

- N - число испытуемых.

Рассчитаем несколько значений четвертого и пятого столбцов табл.3.

Ниже балла 24 нет тестовых баллов. Частота балла 23 равна нулю.

Найдем значения пятого столбца для балла 24.

$$P(24) = \left(\frac{0 + 0,5(1)}{180} \right) \times 100 = 0,278, \text{ или округленно } = 0,28\% \text{ испытуемых.}$$

Нуль в числителе дроби означает количество частот нижележащего балла, равного 23. Напомним, в нашем примере нет испытуемого с баллом 23.

Поэтому частота такого балла равна нулю. Произведение (0,5) x (1) означает половину частот значения 24. Здесь один человек, получивший балл 24.

Вариационный ряд тестовых баллов. N = 180 Табл. 3

X	f	Cf	cf _{B+} .5f	Процентный ранг $X = [(cf_{B+} \cdot 5f) / N] \times 100$	Рейтинг
70	0	180	180	100	-
69	1	180	179,5	99,7	1
68	2	179	178	98,9	2
67	3	177	175,5	97,5	3
66	0	174	174	96,6	-
65	2	174	173	96,1	4
64	4	172	170	94,4	6
63	5	168	165,5	91,9	8
62	3	163	161,5	89,7	10
61	1	160	159,5	88,6	11
60	2	159	158	87,7	12
59	3	157	155,5	86,3	14
58	2	154	153	85	15
57	6	152	149	82,7	17
56	14	146	139	77,2	23
55	12	132	126	70	30
54	7	120	116,5	64,7	35
53	7	113	109,5	60,8	39
52	6	106	103	57,2	43
51	3	100	98,5	54,7	45
50	7	97	93,5	51,9	48
49	11	90	84,5	46,9	53
48	8	79	75	41,6	58
47	7	71	67,5	37,5	53
46	9	64	59,5	33	67
45	7	55	51,5	28,6	71

44	4	48	46	25,5	75
43	4	44	42	23,3	77
42	5	40	35,5	19,7	80
41	4	35	33	18,3	82
40	4	31	29	16,1	84
39	2	27	26	14,4	86
38	4	25	23	12,7	87
37	5	21	18,5	10,3	90
36	4	16	14	7,8	92
35	2	12	11	6,1	94
34	1	10	9,5	5,3	95
33	3	9	7,5	4,2	96
32	2	6	5	2,8	97
31	0	4	4	2,2	98
30	1	4	3,5	1,9	98
29	1	3	2,5	1,4	99
26	0	2	2	1,1	99
25	1	2	1,5	0,8	99
24	1	1	0,5	0,28	100
23	0	0	0	0	-

Как видно из данных табл. 2, на самом деле меньше 24 баллов получили нуль процентов испытуемых. Неточность расчета (в 0,3%) для этого, наименьшего результата, вызваны общим алгоритмом усреднения частот (0,5f). Для остальных баллов алгоритм даёт довольно приемлемые приближения, что видно из следующих примеров.

$$PR(25) = \left(\frac{1,0 + 0,5(1)}{180} \right) \times 100 = 0,833, \text{ или округленно} = 0,8 \text{ процента}$$

испытуемых получили баллы ниже 25-ти.

$$PR(26) = \left(\frac{2,0 + 0,5(0)}{180} \right) \times 100 = 1,111, \text{ или округленно} = 1,1 \text{ процента}$$

испытуемых получили баллы ниже 26-ти.

$$PR(29) = \left(\frac{2,0 + 0,5(1)}{180} \right) \times 100 = 1,388, \text{ или округленно} = 1,4 \text{ процента}$$

испытуемых получили баллы ниже 29-ти.

$$PR(41) = \left(\frac{35 + 0,5(4)}{180} \right) \times 100 = 20,55, \text{ или округленно} = 20,5 \text{ процента}$$

испытуемых получили баллы ниже 41-го.

$$PR(59) = \left(\frac{157 + 0,5(3)}{180} \right) \times 100 = 88,05 \text{ или округленно} = 88 \text{ процентов}$$

испытуемых получили баллы ниже 59-ти.

$$PR(69) = \left(\frac{179 + 0,5(1)}{180} \right) \times 100 = 99,722 \text{ или округленно} = 99,7 \text{ процента}$$

испытуемых получили баллы ниже 69-ти.

Итак, даны баллы и частоты баллов. Иначе говоря, дан вариационный ряд. Посредством формулы (1) находятся значения процента испытуемых, показавших худшие результаты. Главный вопрос при этом – чему равен процент испытуемых, показавших ниже такого-то балла?

Вопрос о процентной шкале оценок возникает при интерпретации тестовых баллов. Испытуемым и их родителям обычно непонятно – что может означать для них, например, балл 57. Но если им объяснить, что менее 57 баллов у 85 процентов испытуемых, то становится ясно, что балл 57 – это очень хороший результат, указывающий, что испытуемый попадает в число 15 процентов наиболее подготовленных учащихся.

В последнем столбце табл. 3 представлен процентный рейтинг испытуемых. Он получается посредством нескольких решающих правил.

1. Испытуемому с самым высоким баллом даётся первый ранг (место). В табл. 3 это испытуемый, имеющий балл 69.

2. Испытуемым со следующим после самого высокого балла даётся второй ранг (второе место).

3. Далее ранги ставятся в таком же порядке. Для программирования рейтинга остальных испытуемых можно использовать формулу $R = 100 - PR_i$

Например, для испытуемых, имеющих балл 65 рейтинг равен 100 – 96,1, что после округления даёт четвёртое место.

Подробнее о проведении рейтинга испытуемых можно прочитать в работе автора³.

На русском языке эта тема подробно изложена в книге Дж. Гласс и Дж. Стэнли. Статистические методы в психологии и педагогике. М.: Педагогика. 1976.

³ Вадим Аванесов. Рейтинг. Педагогические Измерения №1, 2006. С. 106-112. См. также <http://testolog.narod.ru/Theory45.html>